RENTREE 2015

Pour préparer son entrée en Sup, il n'y a pas besoin de réviser le programme de terminale : vous avez été accepté en prépa, vous avez le bac ; vous avez donc « le niveau ».

Ce n'est pas pour autant que vous n'avez rien à faire pendant les vacances d'été.

Tout d'abord, sachez qu'à l'écrit du concours Agro-Veto l'épreuve de français et de LV 1 ont chacune le même coefficient 2, et que les maths, sciences physiques et SVT ont également chacune le même coefficient, 4.

D'autre part, nous attirons votre attention sur le fait que **la calculatrice est interdite** à certains écrits et oraux du concours Agro-Veto **en Mathématiques**. Elle sera donc interdite pendant la plupart des DS de mathématiques de l'année.

Tant en maths qu'en physique-chimie, il est important d'être à l'aise en *calculs*. Le calcul est un outil intermédiaire entre les premières lignes écrites qui ne sont que la traduction du problème, et la conclusion, c'est donc quelque chose de fondamental. Quelqu'un qui ne sait pas *calculer juste* a un sérieux handicap en classe préparatoire. Et les écarts peuvent être énormes, entre celui qui fait un calcul juste, *entièrement détaillé et écrit*, et celui qui fait le même calcul de tête et faux en 30 secondes, ou qui ne sait pas le faire !

On ne peut s'améliorer en calcul qu'en en faisant, et certainement pas en se contentant de regarder les autres faire : ce n'est pas en regardant un champion de tennis jouer que vous apprendrez à jouer (presque) comme lui, mais bien en vous exerçant tous les jours ... Il faut arriver en septembre en étant bien au point sur cet aspect du programme du lycée, et il faudra continuer à vous entraîner régulièrement, tout au long de l'année.

Cette série d'exercices a été conçue dans ce but. Il n'y a pas de mode d'emploi type ; à chacun de voir son organisation : en faire un peu tous les jours dans des domaines variés reste l'idéal. Apprenez également les formules qui sont proposées, et vérifiez régulièrement que vous ne les avez pas oubliées.

Pour vous aider à vous y mettre sérieusement, sachez qu'une *évaluation notée* est prévue à la rentrée.

Vous apporterez ce polycopié à la rentrée pour le premier cours de mathématiques .

Il se peut que certaines réponses soient erronées ; merci de les signaler à l'adresse c.kammerer@orange.fr ou jerome.dhote@wanadoo.fr.

1 Pour se faire la main...

Exercice 1 Supprimer les parenthèses et les crochets dans les expressions suivantes (*les réponses doivent être écrites sous forme ordonnée*) :
$A = (a-b+c)-(2a-3b-4c)+(b-a) = -2a+3b+5c$

$B = [12-(a-b+6)]-[15+(b-a-15)]$

$C = [(a-b)-(5-a)]+[b-7-(a-3)]$

Réponse : voir page 16

Exercice 2 Calculer de deux façons

$$A = \left(-\frac{2}{3}-\frac{4}{5}+1\right)-\left(-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}-2\right)+\left(-2+\frac{5}{3}\right)$$

- en calculant d'abord chaque parenthèse
- en supprimant les parenthèses et en regroupant les termes qui donnent un résultat simple

Réponse : voir page 16

Exercice 3 Calculer

$A = ((a-c)-(a-b))-((b-c)-(a+c))$

$$B = \left(1-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)\right)-\left(1-\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{4}\right)\right)-\left(1-\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{4}\right)\right)$$

$$C = \left(-1+\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\right)\times(-4) \qquad D = \left(\frac{4}{9}-\frac{11}{27}\right)\left(2-\frac{4}{3}\right)$$

$$E = \frac{3-\frac{2}{5}+\frac{3}{4}}{2+\frac{4}{5}-\frac{2}{3}} \qquad F = \frac{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}$$

Réponse : voir page 16

2 Racines carrées

Exercice 4 Exprimer sans racine carrée :

$\sqrt{(-5)^2}$ $\qquad$ $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$

$\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ $\qquad$ $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$

$\sqrt{(3-\pi)^2}$ $\qquad$ $\sqrt{(3-a)^2}$ (selon les valeurs de a)

Réponse : voir page 16

Exercice 5 Ecrire aussi simplement que possible :

$(2\sqrt{5})^2$ $\quad$ $(2+\sqrt{5})^2$

$(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2$ $\quad$ $(\sqrt{2\sqrt{3}})^4$

$(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2$ $\quad$ $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ $\quad$ $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Réponse : voir page 16

Méthode : Pour rendre rationnel un dénominateur, on utilise l'identité $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.
Ainsi : $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4-2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

Exercice 6 Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes :

$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$ $\quad$ $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\quad$ $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ $\quad$ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

Réponse : voir page 16

Exercice 7 Vérifier les égalités suivantes :

$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$ $\quad$ $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

$\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{2}$ $\quad$ $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

Exercice 8 Simplifier les nombres suivants :

$A=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$C=\dfrac{(3\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}$ $\quad$ $J=-\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

$D=\sqrt{75}-\sqrt{12}-\sqrt{27}$ $\quad$ $E=2\sqrt{8}+3\sqrt{32}+2\sqrt{98}$

$F=\sqrt{9(1-\sqrt{3})^2}$ $\quad$ $G=\sqrt{32(1+x)^2}$

$H=\sqrt{1-2\sqrt{x}+x}$ $\quad$ $K=\sqrt{12+3\sqrt{7}}+\sqrt{12-3\sqrt{7}}$

Pour G et H, on s'intéressera également à l'ensemble de définition de l'expression en fonction de x.

Réponse : voir page 16

3 Calculs de factorielles

Pour $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ on pose $n!=1\times 2\times\cdots\times(n-1)\times n$.Par convention $0!=1$

Exercice 9 Simplifier $\dfrac{12!}{8!}$ $\quad$ $\dfrac{12!}{3!10!}$ $\quad$ $\dfrac{1}{9!}-\dfrac{1}{10!}$.
Pour $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et (a,b) deux réels strictement positifs, simplifier

$$A_n=\frac{(n+3)!}{(n+1)!} \qquad B_n=\frac{n+2}{(n+1)!}-\frac{1}{n!} \qquad C_n=\frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ où } u_n=\frac{a^n}{n!b^{2n}}$$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 16

4 Puissances

Pour x un réel (ou complexe) non nul et n un entier naturel non nul, par définition on a :

$$x^n=\underbrace{x\times\cdots\times x}_{n \text{ fois}} \text{ et } x^0=1$$

Règles de calcul : pour x,y **deux réels non nuls** et m,n deux entiers relatifs

$$x^m\times x^n=x^{m+n} \text{ et } (xy)^\alpha=x^m\times y^m$$
$$\frac{1}{x^m}=x^{-m} \text{ et } \frac{x^m}{x^\beta}=x^{m-n}$$
$$(x^m)^n=x^{mn}$$

Règle d'écriture : lorsqu'on a un produit, on n'écrit pas $b\times 2\times 3\times a$ et encore moins $(b\times 2)\times(a\times 3)$, même au cours d'un calcul : on écrit directement $6ab$ en *respectant impérativement l'ordre alphabétique* des lettres.

Exercice 10 Calculer les expressions suivantes :

$A=(7xy)^3$ $\quad$ $(3x^2y)^2=9x^4y^2$ $\quad$ $B=(2a^2b^3)^5$

$C=[(\dfrac{-a}{b})^3]^2\times[(-b)^2]^3$

$D=xy\times(\dfrac{-2}{3})x^2\times\dfrac{3}{4}y^2=-\dfrac{1}{2}x^3y^3$ $\quad$ $E=(\dfrac{2}{7})a^2\times(\dfrac{-3}{4})xy^3\times(\dfrac{-2}{5})a^2x$

$F=(\dfrac{-3}{5})a^2.(\dfrac{2}{3})b^2x.(-x)^4$ $\quad$ $G=4x^3.(-3y^2).(\dfrac{-5}{6})a^2x^2y^5$

Réponse : voir page 16

Puissances réelles

Pour x un réel **strictement positif** et α réel, par définition on pose :

$$\boxed{x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}}$$

Règles de calcul : pour x, y **deux réels strictement positifs** et α, β deux réels

$$\boxed{\begin{array}{l} x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta} \text{ et } (xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha \\ \dfrac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha} \text{ et } \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \\ (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \end{array}}$$

Convention usuelle : « x^{α^β} » souffre d'un problème de parenthésage et pourrait désigner $(x^\alpha)^\beta$ et $x^{(\alpha^\beta)}$. Or les règles de calcul donnent $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$; donc on convient habituellement que la notation x^{α^β} désigne $x^{(\alpha^\beta)}$.

Exercice 11 Simplifier :

$A = \dfrac{4^{12}}{2^{25}}$; $B = \dfrac{3}{2}\dfrac{2^n}{3^{n+1}}$; $E = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$

$F = (-1)^3\left(-\dfrac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\dfrac{2}{7}\right)^2 \times (-7) \times \left(-\dfrac{1}{14}\right)$

$G = 77^{-1} \times 7^4 \times 11^2 \times (7 \times 11)^4 \times (7^2)^{-8} \times (7^{-8})^{-3} \times \dfrac{1}{(-11)^{-3}}$

$K = (a^{n^2})^2$; $L = \dfrac{a^{n^2}}{a^n}$; $M = a^{3n}(a^n)^3$; $P = (a^n)^n$

où a est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

Réponse : voir page 16

Exercice 12 (**exercice fondamental**)

Exprimer en fonction de e^x les nombres suivants :
$A = \mathrm{e}^{kx}$; $B = \mathrm{e}^{-x}$; $C = \mathrm{e}^{3x+2}$; $D = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x+1}$; $E = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$; $F = \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x} + 3$

Réponse : voir page 16

5 Sommes et produits de polynômes

Les "polynômes" seront définis pendant l'année, mais vous avez déjà travaillé avec des expressions polynomiales, par exemple $x^2 - 3x + 1$ ou $x - 2x^3 + 1$.

Un polynôme doit impérativement être ordonné selon les puissances croissantes (ou quelquefois décroissantes). Par exemple, on n'écrit jamais $x - 2x^3 + 1$, mais $-2x^3 + x + 1$.

Exercice 13 Réduire et ordonner les polynômes suivants :

$P(x) = 7x^3 + 8x - 3 + 4x - 2x^3 - 5x + 2 = 5x^3 + 7x - 1$

$Q(x) = \dfrac{-3}{2}x^2 + \dfrac{5}{4}x - 3x^2 + \dfrac{x}{6} - \dfrac{5}{2}x^2 + 5 + 4x^2$

$R(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + xy + y^2 - 2xy + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{3}{2}x^2$

$S(a) = 4a^2 - \dfrac{2}{3}a - \dfrac{2}{5}a^2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}a - 5a + \dfrac{2}{15}a^2 - \dfrac{3}{4}$

$T(x) = 4x^2 - \dfrac{7}{2} + \dfrac{3}{5}x - \dfrac{5}{2}x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 - 5 + \dfrac{3}{2}x^3 + 7 - 2x$

Réponse : voir page 16

Somme de polynômes

Méthode : on considère les polynômes :
$A = 2 - 5x + 4x^3$ $\quad B = -8x + 4x^2 + 6$ $\quad C = -2x^3 + 3 + x^2 + 2x$
Pour calculer la somme $A - B + C$, on recopie sur 3 lignes les polynômes ordonnés, en laissant de l'espace pour les puissances manquantes :

$$\begin{array}{rcccccc} A & = & 4x^3 & & -5x & +2 \\ -B & = & & -4x^2 & +8x & -6 \\ C & = & -2x^3 & +x^2 & +2x & +3 \end{array}$$

puis on additionne par colonnes.

On trouve immédiatement $A - B + C = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

Exercice 14 Former les polynômes $A + B + C$; $A - B + C$; $A + B - C$; $-A + B + C$ avec

$$A = 3x^2 - 4x + 5 \quad B = 2x^2 + 4 - 5x \quad C = 3 - x + 4x^2$$

Réponse : voir page 16

Exercice 15 Même question avec

$$A = 5a^2 - 3ab + 7b^2 \quad B = 9b^2 - 8ab + 6a^2 \quad C = -7b^2 - 3ab + 4a^2$$

Réponse : voir page 16

Produit de deux polynômes à une variable

Méthode : après avoir ordonné les polynômes, on dispose les calculs comme une multiplication d'entiers à l'école primaire, en réservant de l'espace pour les puissances manquantes.
Soient les polynômes $A = 3x^3 - 2 + 5x$ et $B = 2x^2 - 4x + 3$.
Calculer le produit $A.B$

$A =$			$3x^3$		$+5x$	-2
$B =$				$2x^2$	$-4x$	$+3$
$3.A =$			$+9x^3$		$+15x$	-6
$-4x.A =$		$-12x^4$		$-20x^2$	$+8x$	
$2x^2.A =$	$6x^5$		$+10x^3$	$-4x^2$		
$A.B =$	$6x^5$	$-12x^4$	$+19x^3$	$-24x^2$	$+23x$	-6

Exercice 16 Effectuer les produits suivants, réduire et ordonner les résultats :

$A = (4x^5 + 7 - 2x^3)(x^3 - 2x)$
$B = (5x^3 - 2x)(3x - 4x^2)$
$C = (7x^4 - 2x^3 + 4x^2)(3x^2 - 5)$
$D = (2x^2 - 4 + 2x)(x^2 + 5 - 2x)$
$E = (2x - 7x^2 + 5x^3)(3x - 5x^2 + 8)$
$F = (\frac{5}{4}x^3 - 2x + \frac{1}{2})(\frac{7}{2}x^3 - 2x + \frac{1}{2})$
$G = (3x^2 - 1)(x + 1)(x - 1)$
$H = (4x^3 - 7x + 2x^2 + 5)^2$

Réponse : voir page 16

6 Identités remarquables

Démontrer (et apprendre) les identités suivantes :
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$

Factorisation pour a, b réels (ou complexes) et n un entier naturel non nul :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Cette formule est à mettre en relation avec la somme de termes d'une suite géométrique rappelée un peu plus loin ci-dessous.

Exercice 17 Démontrer que pour tous réels a, b, c on a les égalités :

$$\begin{aligned} (a+b)^2 - (a-b)^2 &= 4ab \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)((b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2) \end{aligned}$$

Exercice 18 Factoriser

$A = x^2 - 2x + 1$ $\quad B = x^2 + x + \frac{1}{4}$
$C = 4x^2 - 4x + 1$ $\quad D = a^2 + 4a + 4$
$E = 4x^3 + 8x^2y + 4xy^2$ $\quad F = (x + y)^3 - x^3 - y^3$
$G = (x - y)^3 - x^3 + y^3$ $\quad H = x^3 + 27y^3$
$K = 8a^3 - 125$

Réponse : voir page 16

Exercice 19 Utiliser les identités classiques pour développer les produits suivants :

$A = (\frac{3}{2}x^3 - \frac{2}{5}y^2)^2$
$B = (\frac{4}{3}x^5 + \frac{2}{5}y^3)^2$
$C = (\frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{4}y)(\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{4}y) = 4/25x^4 - 9/16y^2$
$D = (\frac{2}{3}a^2x^3 - \frac{1}{2}b^4)(\frac{2}{3}a^2x^3 + \frac{1}{2}b^4) = 4/9a^4 * x^6 - 1/4b^8$
$E = (3x + 4y - 5)(3x + 4y + 5)$
$F = (\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y - 1)(\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y + 1)$
$G = (3x + 4y - 2z)^2$
$H = (\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}y + z)^2$

Réponse : voir page 16

Exercice 20 Compléter de façon à obtenir une expression de la forme $(T + U)^2$

$A = x^2 + \cdots + 16$ $\quad B = x^2 - \cdots + 9a^2$
$C = 4x^2 - 4x + \ldots$ $\quad D = 9x^2 + 6x + \ldots$
$E = x^2 + \cdots + y^4$ $\quad F = 4a^2x^2 - \cdots + 1$

Réponse : voir page 16

Exercice 21 Décomposer en un produit de facteurs les expressions suivantes :

$A = \frac{5}{2}x^3y^2 - 5x^2y^2 + \frac{5}{2}xy^2$ $\quad$ $B = 18abx^2 - 12abx + 2ab$

$C = \frac{4}{5}a^3x^2 - 5a^3y^2$ $\quad$ $D = \frac{3}{4}a^2bx^2 - \frac{25}{3}a^2by^2$

$E = 25a^2x^4y^2 - 4b^2y^2$ $\quad$ $F = (2x-3)^2 - (3x-5)^2$

$G = (2x+3)^2 - 4(2x+3)$ $\quad$ $H = (5x^2+3x-2)^2 - (4x^2-3x-2)^2$

$I = (3x-5)^2 + (3x-5)(2x+3)$ $\quad$ $J = (a^2+b^2-2)^2 - (2ab-2)^2$

$K = a(x^2+1) - x(a^2+1)$ $\quad$ $L = ab(x^2+y^2) + xy(a^2+b^2)$

$M = (a^2+b^2-10)^2 - (a^2-b^2-8)^2$ $\quad$ $N = (4a^2+b^2-9c^2)^2 - 16a^2b^2$

Réponse : voir page 16

Exercice 22 Simplifier les expressions suivantes, en admettant qu'elles sont définies :

$A = \frac{7a^2x^5}{2b^2x^4}$ $\quad$ $B = \frac{-2a^3b^2x}{3a^3bx^3}$ $\quad$ $C = \frac{10a^2x^3y^2}{-4a^4x^3y}$

$D = \frac{x^2}{x^2-x}$ $\quad$ $E = \frac{x^2+x^3}{x^3-x}$ $\quad$ $F = \frac{6x^2-4x}{9ax-6a}$

$G = \frac{ax+by}{a^2x^2-b^2y^2}$ $\quad$ $H = \frac{x^3-9x}{3x^2-9x}$ $\quad$ $I = \frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

Réponse : voir page 16

Exercice 23 Calculer les expressions suivantes, sans vous préoccuper de leur définition :

$A = \frac{x+1}{6} + 2\frac{2x-1}{21} - \frac{3x+1}{14}$ $\quad$ $B = \frac{x+2}{5} - \frac{4x+3}{15} - \frac{x+1}{3}$

$C = \frac{1}{a(a+1)} - \frac{1}{a(a-1)} + \frac{2a}{a^2-1}$ $\quad$ $D = \frac{2}{2a+1} - \frac{1}{2a-1} + \frac{2}{4a^2-1}$

$E = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{x^2-3}{x^2-1}$ $\quad$ $F = \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$

$G = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{4}{x^2-4}$ $\quad$ $H = \frac{x-2}{x^2+2x} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$

$I = \frac{x^3}{x^3-x^2} + \frac{x}{x+1} - \frac{2x}{x^2-1}$ $\quad$ $J = \frac{1}{x} + \frac{x-2}{x^2-4} - \frac{2}{x^2+2x}$

Réponse : voir page 16

Exercice 24 Simplifier les expressions suivantes, sans vous préoccuper de leur définition :

$A = \frac{x}{2} \times \frac{x+1}{6} \times \frac{4x}{x^2-1}$ $\quad$ $B = \frac{x+3}{5}\frac{x+1}{x^2}\frac{x}{(x+1)(x+3)}$

$C = \frac{a-b}{a} \times \frac{a^2-ab}{5} \times \frac{3a}{a^2-b^2}$ $\quad$ $D = \frac{1}{a^2-ab} \times \frac{4}{a^2} \times \frac{a^2-b^2}{5}$

$E = \dfrac{\dfrac{x}{x-y} - \dfrac{y}{x+y}}{\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{y}{x-y}}$ $\quad$ $F = \dfrac{\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}}{1 - \dfrac{x-1}{x+1}}$

$G = \dfrac{\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - 2}{\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}}$ $\quad$ $H = \dfrac{\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b^2}{a-b}}{\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{ab}{a+b}}$

Réponse : voir page 17

Exercice 25 Résoudre $\left(\frac{x+5}{2}\right)^2 \leqslant \frac{x^2+25}{2}$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 17

Exercice 26 Pour a, b réels et n un entier naturel non nul, factoriser

$A = a^5 - b^5$ $\quad$ $B = a^5 + b^5$

$C = 16a^2 - 8a + 1$ $\quad$ $D = a^4 - 4a^2b^2 + 4b^4$

$E = a^3 - 8b^3$ $\quad$ $F = a^2 + 2a^4 - b^2 - 2b^4$

$G = a^{2n} - 1$ $\quad$ $H = a^{2n+1} + 1$

$J = a^3 + 8 + (a+2)(2a-5)$ $\quad$ $K = a^2 - 4b^2$

$L = 4a^2 + b^2 - 4ab$ $\quad$ $M = a^{2n} - 4^n$

$P = (a+b)^2 - 4ab$

Réponse : voir page 17

Somme des termes d'une suite géométrique : pour q réel (ou complexe)

$$1+q+q^2+\cdots+q^n=\begin{cases}\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q\neq 1\\ n+1 & \text{si } q=1\end{cases}$$

Exercice 27 Calculer en fonction de n
$A_n=1+3+9+\cdots+3^{2n}$
$B_n=-1+4-16\cdots+(-1)^{n-1}4^n$
$C_n=1-a^2+a^4-a^6+\cdots+(-1)^n a^{2n}$ $(\star)$
$D_n=u_0+\cdots+u_n$ où $u_n=(-5)^{3n+1}$ $(\star\star)$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 17

Exercice 28 Calculer $A_n=9+27+\cdots+3^{n+2}$ (on factorisera par 3^2 pour se ramener à la formule encadrée).

Calculer de même $B_n=a^2+a^4+\cdots+a^{2n}$ et $C_n=3^{n+2}+3^{n+3}+\cdots+3^{2n+4}$.

Réponse : voir page 17

7 Logarithmes et exponentielles

Il n'est pas question de donner ici les constructions des fonctions exponentielle et logarithme, qui feront l'objet d'un chapitre de cours, mais seulement de rappeler les principales règles de calcul :

- La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie pour tous réels a et b **strictement positifs** :
  $\ln(ab)=\ln a+\ln b$ et $\ln 1=0$
  d'où $\ln\dfrac{1}{a}=-\ln a$ et $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

Ecrire $\ln(xy)=\ln x+\ln y$ exige d'avoir $x>0$ et $y>0$.

- la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\exp(a+b)=\exp a\exp b$ pour tous réels a et b. On note usuellement $\exp a=\mathrm{e}^a$ où $\ln \mathrm{e}=1$.

Enfin pour tout réel x **strictement positif** et pour tout entier relatif (et même tout réel) α on a

$$\exp(\ln x)=x \quad \text{et} \quad \ln x^\alpha=\alpha\ln x$$

Exercice 29 Calculer les nombres suivants

1. en fonction de $\ln 2$:
$$\ln 16 \quad \ln 512 \quad \ln 0.125 \quad \frac{1}{8}\ln\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{8} \quad \ln 72-2\ln 3$$
2. en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:
$$\ln 36 \quad \ln\frac{1}{12} \quad \ln 2.25 \quad \ln 21+2\ln 14-3\ln 0.875$$
3. en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$:
$$\ln 500 \quad \ln\frac{16}{25} \quad \ln 6.25 \quad \ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\cdots+\ln\frac{98}{99}+\ln\frac{99}{100}$$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 17

Exercice 30 Calculer $(1+\sqrt{2})^2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

En déduire que $\dfrac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2})-4\ln(\sqrt{2}+1)=\dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$

Indication : voir page 15

Exercice 31 Calculer y sachant que
$$\ln y=\ln(7+5\sqrt{2})+8\ln(\sqrt{2}+1)+7\ln(\sqrt{2}-1)$$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 17

Exercice 32 Simplifier
$$A=\ln\left((2+\sqrt{3})^{20}\right)+\ln\left((2-\sqrt{3})^{20}\right) \quad B=\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

Réponse : voir page 17

Exercice 33 Simplifier les nombres suivants
$$\mathrm{e}^{3\ln 2} \quad \ln(\sqrt{e}) \quad \ln(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}) \quad \mathrm{e}^{-2\ln 3} \quad \ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}) \quad \ln(\sqrt[5]{\mathrm{e}})$$

Réponse : voir page 17

Exercice 34 Montrer que les fonctions suivantes sont impaires :
$$f:x\mapsto\ln\frac{2010+x}{2010-x} \qquad g:x\mapsto\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \qquad h:x\mapsto\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$$
On n'oubliera pas de vérifier que leur ensemble de définition est centré en 0 !

Exercice 35 Résoudre les équations suivantes :
$$(a)\quad \ln(-x-5)=\ln(x-61)-\ln(x+7)$$
$$(b)\quad \ln(-x-5)=\ln\frac{x-61}{x+7}$$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 17

Exercice 36 Simplifier

$a = \mathrm{e}^{\ln 3 - \ln 2}$ $\quad b = -\mathrm{e}^{-\ln\frac{1}{2}}$ $\quad c = \mathrm{e}^{-\ln\ln 2}$ $\quad d = \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{17}}\right)$

$f = \ln(\sqrt{\mathrm{e}^4}) - \ln(\sqrt{\mathrm{e}^2})$ $\quad g = \ln\left(\sqrt{\exp(-\ln \mathrm{e}^2)}\right)$ $\quad h = \exp\left(-\dfrac{1}{3}\ln(\mathrm{e}^{-3})\right)$

Réponse : voir page 17

Exercice 37 Soit $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a+b) = \dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$.

Questions subsidiaires : déterminer la parité de cette fonction et en calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Réponse : voir page 17

Exercice 38 Simplifier pour x non nul l'expression $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}|\ln(x^2)|}$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 17

Exercice 39 Résoudre les inéquations suivantes :

(1) $\mathrm{e}^{3x-5} \geqslant 12$ $\quad 1 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2+x}$ $\quad$ (2)
(3) $\mathrm{e}^{1+\ln x} \geqslant 2$ $\quad \mathrm{e}^{-6x} \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}$ $\quad$ (4)

Réponse : voir page 17

8 Trigonométrie

Avertissement au lecteur : toutes les formules de ce paragraphe sont à savoir sur le bout des doigts, et pas seulement à « savoir (prétendûment) retrouver ».

Là encore, pas question de faire ici un cours complet sur les fonctions trigonométriques cos, sin, tan, seulement de brefs rappels [1] :

- la fonction sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2π-périodique (pour tout réel x, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$) et impaire (pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$) ;
- la fonction cos : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2π-périodique et paire (pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$) ;
- la fonction tan $= \dfrac{\sin}{\cos}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$; elle est π-périodique (pour tout réel x, $\tan(x+\pi) = \tan(x)$) et impaire.

1. et une invitation très ferme à aller revoir vos cours de lycée sur la question

Exercice 40 Faire l'étude de la fonction tan $= \dfrac{\sin}{\cos}$:
domaine de définition, parité, périodicité, limites aux bornes de l'ensemble de définition ; dérivabilité, montrer que sa dérivée est $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$; tableau de variation et graphe.

Réponse : voir page 17

Première formule : $\boxed{\cos^2 + \sin^2 = 1}$

Première série de formules pour un réel a quelconque [2] :

$\cos(-a)$	$=$	$\cos a$	$\sin(-a)$	$=$	$-\sin a$	$\tan(-a)$	$=$	$-\tan a$
$\cos(\pi - a)$	$=$	$-\cos a$	$\sin(\pi - a)$	$=$	$\sin a$	$\tan(\pi - a)$	$=$	$-\tan a$
$\cos(\pi + a)$	$=$	$-\cos a$	$\sin(\pi + a)$	$=$	$-\sin a$	$\tan(\pi + a)$	$=$	$\tan a$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$	$=$	$\sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$	$=$	$\cos a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$	$=$	$\dfrac{1}{\tan a}$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$	$=$	$-\sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$	$=$	$\cos a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$	$=$	$-\dfrac{1}{\tan a}$

Résolution d'équations trigonométriques. a est un réel donné.

$\sin x = \sin a \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$.
$\cos x = \cos a \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$.
$\tan x = \tan a \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a + k\pi$.

Exemple : résoudre l'équation $\sin 3x = \sin x$

$$\begin{aligned} \sin 3x = \sin x &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 3x = x + 2k\pi \text{ ou } 3x = \pi - x + 2k\pi \\ &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2x = 2k\pi \text{ ou } 4x = \pi + 2k\pi \\ &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 41 Résoudre les équations suivantes

(1) $\sin x = \sin(\pi - 3x)$ $\quad$ (2) $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin(3x + \frac{\pi}{2})$
(3) $\cos 2x + \cos\dfrac{x}{2} = 0$ $\quad$ (4) $\tan x = \tan(\frac{\pi}{2} + x)$
(5) $\cos(\frac{7\pi}{5} - x) = \cos(\frac{2\pi}{5} + 3x)$ $\quad$ (6) $\tan(x - \frac{\pi}{4}) + \tan 3x = 0$
(7) $\cos x = \sin\dfrac{7x}{5}$ $\quad$ (8) $\cos 4x = \sin 7x$
(9) $\sin(\frac{5\pi}{2} - x) + \cos 2x = 0$
(10) $\sin 2x + \cos 3x = 0$ $\quad$ (11) $\tan 3x = \tan 5x$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 17

2. Formules à connaître par cœur et, pour les deux premières colonnes, à voir sur le cercle trigonométrique... vous trouverez sur internet

Deuxième série de formules[3] :

$$\begin{array}{lcl|lcl} \cos(a+b) & = & \cos a\cos b - \sin a\sin b & \cos(a-b) & = & \cos a\cos b + \sin a\sin b \\ \sin(a+b) & = & \sin a\cos b + \cos a\sin b & \sin(a-b) & = & \sin a\cos b - \cos a\sin b \\ \tan(a+b) & = & \dfrac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\tan b} & \tan(a-b) & = & \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a\tan b} \end{array}$$

Exercice 42 Démontrer les formules sur la tangente d'une somme.

Formules de duplication [4]

$$\begin{array}{lcl} \cos(2a) & = & \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \\ \sin(2a) & = & 2\cos a\sin a \end{array}$$

Valeurs remarquables [5]

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X	0

X : non défini, attention !

Exercice 43 Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \pi \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

Réponse : voir page 17

Exercice 44 En remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$ calculer $\cos\frac{5\pi}{12}, \sin\frac{5\pi}{12}, \tan\frac{5\pi}{12}$.

Réponse : voir page 17

Exercice 45 Simplifier $\dfrac{\sin 2a}{\sin a} - \dfrac{\cos 2a}{\cos a}$.

Réponse : voir page 17

Exercice 46 Calculer $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$; en déduire la résolution des équations $\sin x + \cos x = 1$ puis $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

Réponse : voir page 18

3. Formules à apprendre également...
4. Formules à apprendre également...
5. Là encore, à apprendre et à placer sur un cercle trigonométrique.

9 Valeurs absolues

On appelle **valeur absolue** de $x \in \mathbb{R}$ le réel, noté $|x|$, défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Inéquations : pour un réel **positif** a on a $\begin{array}{lcl} |x| \leqslant a & \iff & -a \leqslant x \leqslant a \\ |x| \geqslant a & \iff & x \leqslant -a \quad \text{ou} \quad a \leqslant x \end{array}$

Enfin pour deux réels x et y quelconques on a $|x| \leqslant |y| \iff x^2 \leqslant y^2$

NB : en général on n'a pas $|x+y| = |x| + |y|$; on dispose seulement de l'inégalité triangulaire : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

Exercice 47 Représenter graphiquement les solutions des inéquations du premier encadré ci-dessus de deux façons :
- sur un axe réel
- en construisant la représentation graphique de la fonction $x \mapsto |x|$.

Exercice 48 Résoudre les inéquations suivantes :

(1) $|x-3| \leqslant 4$ (2) $|2x+1| \geqslant 5$ (3) $|x+2| > -5$
(4) $|x-1| \leqslant |2x+3|$ (5) $|-2x+3| \leqslant 7$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 18

10 Equations polynômiales du premier degré

Rappel :

Si a, b, c et d sont des nombres réels (ou complexes) et b et d ne sont pas nuls,
alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$

Exercice 49 Résoudre les équations suivantes

$3x = 4$ (1) $\qquad \dfrac{4}{x-3} = 2$ (2) $\qquad \dfrac{2x+3}{x-5} = \dfrac{4}{3}$ (3) $\qquad \dfrac{3}{x-\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}-x}$ (4)

Réponse : voir page 18

Exercice 50 Résoudre les équations suivantes :

$5(2x-3)-4(5x-7)=19-2(x+11)$; $4(x+3)-7x+17=8(5x-3)+166$

$17-14(x+1)=13-4(x+1)-5(x-3)$; $17x+15(x-1)=-1-14(3x+1)$

$(x-1)^2+(x+3)^2=2(x-2)(x+1)+38$; $5(x^2-2x-1)+2(3x-2)=5(x+1)^2$

$(3x-1)^2-(2x+3)^2+7=(2x+1)(2x-1)+x(x+7)$

$(x+2)^3+(x-2)3+(x+1)^3=3(x+1)(x-2)(x+2)$ $\dfrac{x}{5}-\dfrac{3x-1}{6}+\dfrac{3-x}{4}=0$

$\dfrac{(x-1)(x+5)}{3}-\dfrac{(x+2)(x+5)}{12}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{4}$

Réponse : voir page 18

Exercice 51 Résoudre les équations suivantes :

$(x-1)(x-2)(x-3)=0$	$(x-3)(x-4)(x-5)=0$
$(2x+1)(x+1)(x-3)=0$	$(2x+1)(x+4)(3x+1)=0$
$x(5x+1)(4x-3)(3x-4)=0$	$5x(3x-7)=0$
$x^2-3x=0$	$5x^2+8x=0$
$4x^2-7x/3=0$	$x^2/5+x=0$
$-3x^2/5+x=0$	$-5x^2/7-3x/4=0$
$x(x+1)=x+1$	$(4x-1)(x-3)=(x-3)(5x+2)$
$(x+3)(x-5)+(x+3)(3x-4)=0$	$(x+5)(4x-1)+x^2-25=0$
$(x+4)(5x-9)-x^2+16=0$	$5(x+1)(x+2)(x-3)=4(x+1)(x+2)(x-4)$
$x^2-9=0$	$5x^2-125=0$
$4x^2-49=0$	$x^2-100=0$
$x^2=81$	$9x^2=64$
$(x+1)^2-(2x-5)^2=0$	$(2x+7)^2-(4x-9)^2=0$
$(5x+1)^2=(x-1)^2$	$(3x+1)^2=(x-4)^2$
$4(x+1)^2-9(x-1)^2=0$	$(x+7)^2-81(x-5)^2=0$
$5x^2-5x=0$	$(x+1)(x-1)^2-(x+1)(x-2)^2=0$
$3x^3-12x=0$	$(3x+1)(x-3)^2=(3x+1)(2x-5)^2$

Réponse : voir page 18

11 Trinômes réels

Soit (a,b,c) trois réels avec $a\neq 0$.
L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux racines réelles si et seulement si son discriminant $\Delta=b^2-4ac$ est positif ou nul.
Dans ce cas ces racines valent $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, la somme des racines vaut alors $S=-\dfrac{b}{a}$ et le produit vaut $P=\dfrac{c}{a}$.
Si le discriminant est nul, il y a alors une racine double qui vaut $-\dfrac{b}{2a}$.
Enfin, la fonction $x\mapsto ax^2+bx+c$ est du signe de a sauf entre les racines s'il y en a.

Exercice 52 Démontrer les résultats ci-dessus, et faire les représentations graphiques correspondant aux différents cas.

Remarque : (essayer de) ne pas passer à côté d'éventuelles racines « évidentes » !

En effet, on a l'égalité : $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$.

Exemple d'utilisation : si l'équation $x^2-5x+6=0$ admet deux solutions α et β, alors leur somme vaut 5 et leur produit 6.

Or $6=6\times 1=3\times 2$; et $6+1=7$ et $3+2=5$.

On obtient ainsi facilement et sans calcul l'égalité $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$: les solutions sont donc 2 et 3.

Exercice 53 Résoudre les équations suivantes :

$a)8x^2-6x+1=0$	$b)x^2-10x+16=0$
$c)x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{8})x+4=0$	$d)x^2-(a+2)x+2a=0$
$e)x^2+(1+\pi)x+\pi=0$	$f)-x^2+8x+6=0$
$g)8x^2+6x+1=0$	$h)-x^2+6x=0$
$i)3x^2=8$	$j)169x^2+13x-1=0$
$k)x^2+4ax+3a^2=0$	$l)-12x^2+125=0$
$m)-6x^2+7x-1=0$	

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 18

Exercice 54 Résoudre les équations suivantes :

(1) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{7}{12}$ (2) $(3x-1)(2x+1)=9x^2-1$

(3) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{24}$ (4) $\dfrac{x^2-x-1}{x+2}=2x+3$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 18

Exercice 55 Résoudre rigoureusement les équations suivantes ($\star\star$)

(1) $\sqrt{x^2-3}=5x-9$ (2) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}=1$ (3) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}=1$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 18

Exercice 56 Résoudre **sans tableau de signes ni le moindre calcul** les inéquations suivantes

(1) $(3x-1)(x-5)<0$ (2) $(5-2x)(3+x)>0$ (3) $\dfrac{2x+1}{x-5}\leqslant 0$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 18

Exercice 57 Résoudre les inéquations et systèmes d'inéquations suivante

a) $x^2+1>2x-3$ b) $2x-1\leqslant x^2+4$

c) $\dfrac{1}{x-1}<\dfrac{3}{x-2}$ d) $\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x-2}\geqslant 1$

e) $(x^2-5x+4)(x^2-4x+3)>0$ f) $(x^2-5x+4)(x^2-9x+14)\leqslant 0$

g) $5\leqslant x^2-14x+50\leqslant 26$ h) $0\leqslant\dfrac{(x-3)^2}{(x+1)^2}<1$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 18

Exercice 58 Résoudre les inéquations suivantes

$$2x-\sqrt{x}-1<0 \quad (1) \qquad x+1<\sqrt{x+4} \quad (2) \qquad x-3\geqslant\sqrt{x^2-2x} \quad (3)$$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 18

Exercice 59 Résoudre l'équation $x^4-4x^2-5=0$.

Réponse : voir page 18

Exercice 60 Résoudre successivement les équations suivantes

$$(\ln x)^2-\ln x-42=0 \qquad (\ln x)^2-\frac{42}{(\ln x)^2}=1$$

Réponse : voir page 18

12 Deux équations, deux inconnues

Résolution de systèmes **linéaires** de deux équations à deux inconnues : par combinaison.

Exemple. Résoudre $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y &=& 4\\ 5x-6y &=& 1\end{array}\right.$.

$\left\{\begin{array}{rcl|l} 3x+2y &=& 4 & \times 5\\ 5x-6y &=& 1 & \times 3\end{array}\right.$ donne par soustraction $28y=17$ d'où $y=\dfrac{17}{28}$.

$\left\{\begin{array}{rcl|l} 3x+2y &=& 4 & \times 6\\ 5x-6y &=& 1 & \times 2\end{array}\right.$ donne par addition $28x=26$ d'où $x=\dfrac{13}{14}$.

Puis on vérifie en reportant dans les équations : $3\times\dfrac{13}{14}+2\times\dfrac{17}{28}=4$ et $5\times\dfrac{14}{13}-6\times\dfrac{17}{28}=1$.

Exercice 61 Résoudre successivement

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& -\dfrac{1}{2}\\ 5x+y &=& 2\end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{3-y} &=& -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{5}{1-x}-\dfrac{1}{3-y} &=& -2\end{array}\right.$$

Réponse : voir page 18

Exercice 62 Même exercice.

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} 2x-6\mathrm{e}^{-2}y &=& -4\mathrm{e}^{-2}\\ \mathrm{e}^2x+2y &=& 3\end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} 2\mathrm{e}^x-6\mathrm{e}^{y-2} &=& -\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}\\ \mathrm{e}^{x+2}+2\mathrm{e}^y &=& 3\end{array}\right.$$

Réponse : voir page 18

Exercice 63 Résoudre $\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y &=& 10\\ \mathrm{e}^{x-y} &=& \dfrac{2}{5}\end{array}\right.$

Réponse : voir page 18

Exercice 64 Résoudre $\left\{\begin{array}{rcl} 4\cos x-\cos y &=& -1\\ 2\cos x-3\cos y &=& 2\\ 0\leqslant x,y\leqslant\pi & & \end{array}\right.$

Réponse : voir page 18

Exercice 65 Somme et produit. Résoudre les deux systèmes suivants.

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 65\\ \ln x+\ln y &=& \ln 1000\end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 30\\ \ln x+\ln y &=& 3\ln 6\end{array}\right.$$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 18

Exercice 66 Deux systèmes non linéaires. Résoudre les deux systèmes suivants.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{x-y} &=& \mathrm{e}\\ 3\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}\mathrm{e}^y &=& \mathrm{e}^{18}\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 5\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y &=& 19\\ \mathrm{e}^{x+y} &=& 30\end{array}\right.$$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 18

13 Nombres complexes

Là encore, pas question de faire un cours complet sur les nombres complexes.

Formulaire :

Soient z et z' deux nombres complexes.
$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
$\overline{z.z'}=\overline{z}.\overline{z'}$
$|z|=\sqrt{z.\overline{z}}$ ou encore $|z|^2=z.\overline{z}$
si $z\neq 0$, $\dfrac{1}{z}=\dfrac{z}{|z|^2}$ et $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{z.\overline{z'}}{|z'^2|}$
pour tout entier n, $|z^n|=|z|^n$, et extension aux entiers négatifs si $z\neq 0$

Exercice 67 Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$a = (3+4i)(4-3i)$; $b = (3-i)^2$; $c = (2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})$;

$d = \dfrac{2}{1+i}$; $e = \dfrac{1}{3-i\sqrt{2}}$; $f = \dfrac{1}{i\sqrt{2}-1}$;

$g = \dfrac{2-5i}{3+2i}$; $h = \dfrac{6+3i}{1-2i}$; $k = \dfrac{3i}{3+4i}$

$l = \dfrac{2}{1-2i} + \dfrac{3}{2+i}$; $m = 2i - \dfrac{3}{i-3}$

Réponse : voir page 18

Exercice 68 Ecrire en fonction du conjugué $\overline{z}$ de z le conjugué du nombre complexe Z :

$Z = -2i + 3z$; $Z = 3 + i - 2iz$; $Z = (2-iz)(2z-4+3i)$; $Z = \dfrac{2i+1-iz}{5i+2z}$

Réponse : voir page 18

Exercice 69 résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z et donner les solutions sous forme algébrique._

$iz = 3 + i$	$(2-i)z - 2i = iz + 2 - 3i$
$(2iz+i)(4z-8-4i) = 0$	$\dfrac{z-2i}{z+2} = 4i$
$4\overline{z} + 2i - 4 = 0$	$(iz - 2 + i)(2i\overline{z} + i - 2) = 0$
$2z + i\overline{z} = 4$	$2iz - \overline{z} = 4i$

Réponse : voir page 18

Ici α et α' désignent des nombres réels et n un entier naturel.

D'abord la définition : $\boxed{\mathrm{e}^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha}$

Puis un formulaire :

$$\mathrm{e}^{i\alpha} \times \mathrm{e}^{i\alpha'} = \mathrm{e}^{i(\alpha+\alpha')} \qquad \frac{1}{\mathrm{e}^{i\alpha}} = \mathrm{e}^{-i\alpha} = \overline{\mathrm{e}^{i\alpha}} \qquad (\mathrm{e}^{i\alpha})^n = \mathrm{e}^{in\alpha} \qquad \frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{\mathrm{e}^{i\alpha'}} = \mathrm{e}^{i(\alpha-\alpha')}$$

Exercice 70 Placer le nombre $\mathrm{e}^{i\alpha}$ dans le plan complexe ainsi que son conjugué. Démontrer les deux premières formules de l'encadré en utilisant la définition de $\mathrm{e}^{i\alpha}$ et les formules de trigonométrie donnant le cosinus d'une somme.

Exercice 71 Mettre sous forme algébrique, placer sur un cercle trigonométrique et écrire sous forme trigonométrique $\mathrm{e}^{i\alpha}$ les nombres suivants :

$a = \mathrm{e}^{0\mathrm{i}\pi}$ $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ $c = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}$ $d = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ $f = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi}$ $g = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$h = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$ $j = -\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ $k = i\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ $l = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}$ $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ne pas hésiter à poursuivre l'exercice...

Réponse : voir page 18

Exercice 72 On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}$. Calculer ω^5. Montrer que $\mathrm{e}^{-i\frac{6\pi}{5}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}$.
Calculer $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8, \omega^9, \ldots$ et remarquer que ω n'a que 5 puissances distinctes.
Que vaut ω^{2013} ?
Calculer de même $\omega^{-1}, \omega^{-2}, \omega^{-3}, \omega^{-4}, \omega^{-5}, \omega^{-6}, \ldots$.

Réponse : voir page 18

Exercice 73 Même exercice avec $\omega' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$.

Formules d'Euler.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{i\theta} & = & \cos\theta + i\sin\theta \\ \mathrm{e}^{-i\theta} & = & \cos\theta - i\sin\theta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \cos\theta & = & \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta & = & \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i} \end{array}\right.$$

Exercice 74 Développer $(a+b)^4$, puis calculer $(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})^4$ pour x un réel quelconque. En déduire

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$$

Réponse : voir page 18

Exercice 75 Développer $(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})^2(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix})^4$ où x est un réel quelconque. En déduire

$$\cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{32}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 2x + \frac{1}{16}$$

Réponse : voir page 18

Exercice 76 Démontrer que pour tout réel x on a

$$\cos^3 x \sin^4 x = \frac{1}{64}(\cos 7x - \cos 5x - 3\cos 3x + 3\cos x)$$

14 Calculs de limites

Rappel.

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
Si f est une fonction bornée et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)=0$

Résultats : ces résultats à savoir par cœur permettent de lever des indéterminations

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x)=0$$

Exercice 77 Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$a : x\mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ $\quad b : x\mapsto \dfrac{x+7}{4x+3}$ $\quad c : x\mapsto \dfrac{x^2+5}{x^3-1}$ $\quad d : x\mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

$e : x\mapsto \cos(x^2)\mathrm{e}^{-x}$ $\quad f : x\mapsto \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$ $\quad g : x\mapsto (2+\sin x)x$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 18

Une technique essentielle pour calculer une limite est de **mettre en facteur le terme prépondérant**.

Exemple. Déterminer la limite en $+\infty$ de $F(x)=\dfrac{x^5-4x^4+2x^2-30}{x^3+5x-4}$.

Au numérateur $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4=+\infty$ etc. Mais de tous les termes du numérateur le terme prépondérant (c'est-à-dire celui qui croît le plus vite vers $+\infty$) est le terme en x^5. En faisant une remarque similaire pour le dénominateur, on est donc amené à écrire :
$F(x)=\dfrac{x^5(1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}-\frac{30}{x^5})}{x^3(1+\frac{5}{x^2}-\frac{4}{x^3})}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$

Exercice 78 Utiliser cette technique pour déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes

- $g_1(x)=\dfrac{x+3}{2-x}$
- $g_2(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$
- $g_3(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{-x^2+x-1}$
- $g_4(x)=\dfrac{x+\ln(x)}{2x-\ln(x)}$
- $g_5(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^x-x}{\mathrm{e}^x+1}$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 18

Exercice 79 Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

- $f_1(x)=\dfrac{x^2+x^3+3\ln x+\mathrm{e}^{-x}}{x^4+\cos x-1}$
- $f_2(x)=\dfrac{50x+x\ln x}{x\ln x+3}$
- $f_3(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}+\sqrt{x}+\mathrm{e}^x+\cos x}{x^{20}+2x^{2013}}$
- $f_4(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}$
- $f_5(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x^6+2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{x/2}}$
- $f_6(x)=\mathrm{e}^{-3\sqrt{x}+x-\ln(x^2+1)+\cos x}$
- $f_7(x)=\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$
- $f_8(x)=\ln(\mathrm{e}^{2x}+1)-2x$

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 18

15 Dérivées

Pour u et v deux fonctions dérivables :

Fonction	Dérivée	Observations
$u+v$	$u'+v'$	
λu	$\lambda u'$	λ est un réel
uv	$uv'+u'v$	
u^n avec $n\in\mathbb{Z}$	$nu^{n-1}u'$	u ne s'annule pas si $n\in\mathbb{Z}_-$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas !
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{vu'-uv'}{v^2}$	v ne s'annule pas !
$x\mapsto \mathrm{e}^x$	$x\mapsto \mathrm{e}^x$	
$\ln$	$x\mapsto \dfrac{1}{x}$	
$f\circ g=f(g)$	$f'(g)\times g'$	bien justifier la dérivabilité de la composée...
$\ln\lvert f\rvert$	$\dfrac{f'}{f}$	f ne s'annule pas
u^α avec $\alpha\in\mathbb{R}^*$	$\alpha u^{\alpha-1}u'$	$u>0$
$\sqrt{\cdot}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\cdot}}$	$\sqrt{\cdot}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
$\sin$	$\cos$	
$\cos$	$-\sin$	
$\tan$	$1+\tan^2=\dfrac{1}{\cos^2}$	

Exemple : dériver la fonction $F : x \mapsto \sqrt{x-1}$.

- la fonction $g : x \mapsto x-1$ est définie et dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x > 1$ on a $x-1 > 0$.
- la fonction $f : y \mapsto \sqrt{y}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc $F = f \circ g$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ comme composée et pour $x \in]1,+\infty[$ on a

$$F'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Exercice 80 Justifier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ $\quad f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ $\quad f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ $\quad f : x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$ $\quad \ldots$

$f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ $\quad f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$ $\quad f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^3}$ $\quad f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^4}$ $\quad \ldots$

$f : x \mapsto \dfrac{1}{2x+1}$ $\quad f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^2}$ $\quad f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^3}$ $\quad f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^4}$ $\quad \ldots$

etc. en utilisant la formule donnant la dérivée de u^α **et pas celle de la dérivée de** $\dfrac{1}{u}$.

Réponse : voir page 18

Exercice 81 Justifier la dérivabilité et calculer la dérivée des les fonctions suivantes ; mettre le résultat sous une forme propice à une éventuelle étude de signe

$f_1 : x \mapsto (x-1)^3$ $\quad f_2 : x \mapsto (x^2-1)^3$ $\quad f_3 : x \mapsto 3x^2-6x+1$

$f_4 : x \mapsto (x-1)(x-2)$ $\quad f_5 : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+3}$ $\quad f_6 : x \mapsto \dfrac{3-x}{2+x}$

$f_7 : x \mapsto \dfrac{3x+1}{1-x}$ $\quad f_8 : x \mapsto 3x^2 - \dfrac{1}{x}$ $\quad f_9 : x \mapsto (x-2)(3-x)(x-4)$

$g_1 : x \mapsto \dfrac{3x^2-2x+1}{-x+2}$ $\quad g_2 : x \mapsto \dfrac{x^2-2x+3}{x^2-x+2}$ $\quad g_3 : x \mapsto \sqrt{2x-3}$

$g_4 : x \mapsto \sqrt{x^2-2x+5}$ $\quad g_5 : x \mapsto \sqrt[5]{x^2+1}$ $\quad g_6 : x \mapsto \dfrac{1}{-x+2}$

$g_7 : x \mapsto \cos(2x - \dfrac{\pi}{3})$ $\quad g_8 : x \mapsto \sin(\dfrac{\pi}{6} - 2x)$ $\quad g_9 : x \mapsto \sin 2x \cos x$

$h_1 : x \mapsto 6\cos^2 x - 6\cos x - 9$ $\quad h_2 : x \mapsto \dfrac{\cos x}{1+\cos^2 x}$ $\quad h_3 : x \mapsto 2\sin x \cos + \sin x + \cos x$

$h_4 : x \mapsto \dfrac{\sin x - x\cos x}{x\sin x + \cos x}$ $\quad h_5 : x \mapsto \ln(5x-1)$ $\quad h_6 : x \mapsto \ln(x^2+1)$

$h_7 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ $\quad h_8 : x \mapsto \ln\ln x$ $\quad h_9 : x \mapsto \ln|7-2x|$

$u_1 : x \mapsto x\ln x - x$ $\quad u_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$ $\quad u_3 : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2-x+1}$

$u_4 : x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$ $\quad u_5 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$ $\quad u_6 : x \mapsto \mathrm{e}^{x\ln x}$

$u_7 : x \mapsto x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ $\quad u_8 : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1)$ $\quad u_9 : x \mapsto \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

$v_1 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ $\quad v_2 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

$v_3 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ $\quad v_4 : x \mapsto \tan 2x$

Réponse : voir page 19

16 Primitives

Pour u et v deux fonctions continues donc admettant des primitives U et V on a :

Fonction	Primitives	Observations
$u+v$	$U+V+\text{cte}$	
λu	$\lambda U+\text{cte}$	λ est un réel
$u^n u'$ avec $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{1}{n+1}U^{n+1}+\text{cte}$	u ne s'annule pas si $n \in \mathbb{Z}_-$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+\text{cte}$	cas précédent pour $n=-1$ u ne s'annule pas
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x+\text{cte}$	
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\ln+\text{cte}$	sur $\mathbb{R}_+^*$
$f'(g)\times g'$	$f\circ g+\text{cte}$	
$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert+\text{cte}$	f ne s'annule pas
$u^\alpha u'$ avec $\alpha \neq -1$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+\text{cte}$	$u>0$
$\sin$	$-\cos+\text{cte}$	
$\cos$	$\sin+\text{cte}$	
$1+\tan^2=\dfrac{1}{\cos^2}$	$\tan+\text{cte}$	

où cte désigne une constante arbitraire réelle.

Exercice 82 Déterminer l'ensemble des primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 19

Remarque : tous les calculs suivants relèvent d'une stricte application du formulaire ci-dessus .

Exercice 83 Calculer les primitives des fonctions suivantes, puis dériver le résultat obtenu pour contrôler la réponse.

$f : x \mapsto x^{16} - 35x^{13} + 14x^{11} - 3x^8 + 20x^4 + 56x^3 + 51x^2 + 18x + 1$

$f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ $\quad f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ $\quad f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ $\quad f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$

$g_1 : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ $\quad g_2 : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$ $\quad g_3 : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^3}$ $\quad g_4 : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^4}$

$h_1 : x \mapsto \dfrac{1}{2x+1}$ $\quad h_2 : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^2}$ $\quad h_3 : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^3}$ $\quad h_4 : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^4}$

Réponse : voir page 19

Exercice 84 Calculer une primitive des fonctions suivantes puis dériver le résultat obtenu ... :

$a) x \mapsto 4x^2 - 5x + \dfrac{1}{x^2}$	$b) x \mapsto x(2x^2+1)^4$	$c) x \mapsto (x-1)^3$
$e) x \mapsto (x^2-1)^3$	$f) x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$g) x \mapsto \sqrt{x} + 1$
$h) x \mapsto \sin 2x$	$i) x \mapsto \cos 3x$	$j) x \mapsto 1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$k) x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x}$	$l) x \mapsto 2x(x^2-1)^5$	$m) x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+2)^2}$
$n) x \mapsto \dfrac{1}{x-3}$	$o) x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}$	$p) x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3-1}$
$q) x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$	$r) x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{5\mathrm{e}^x+1}$	$s) x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\sqrt[3]{1+\mathrm{e}^{2x}}$
$t) x \mapsto \tan x$	$u) x \mapsto x\mathrm{e}^{x^2}$	$v) x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
$w) x \mapsto \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$	$y) x \mapsto \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$	$z) x \mapsto -\sqrt{\mathrm{e}^x}$
$\alpha) x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$	$\beta) x \mapsto \sin x \mathrm{e}^{\cos x}$	$\gamma) x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2}$
$\delta) x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+2\mathrm{e}^x)^{\frac{3}{2}}}$	$\varepsilon) x \mapsto \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$	

Indication : voir page 15

Réponse : voir page 19

Exercice 85 Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_{10}^{20} \frac{dv}{v} \qquad I_2 = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2t} dt \qquad I_3 = \int_{10^{-5}}^{10^{-2}} \frac{dp}{2p} \qquad I_4 = \int_{275}^{315} \frac{2dT}{T} \qquad I_5 = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} A\cos(\omega t + \varphi) dt$$

Réponse : voir page 19

Indication de l'**exercice 9** : pour C_n : rappels de cours sur les puissances dans le paragraphe 4.

Indication de l'**exercice 25** : développer puis factoriser...

Indication de l'**exercice 27** : identifier soigneusement la raison avant d'appliquer une formule :
- calculer $-B_n$
- pour C_n, la raison se voit
- pour D_n, commencer par factoriser par 5 avant de chercher la raison.

Indication de l'**exercice 29** : $0.125 = 2^{\cdots}$

Indication de l'**exercice 30** : ne pas oublier la « quantité conjuguée », et tout exprimer en fonction de $\ln(1+\sqrt{2})$.

Indication de l'**exercice 31** : se reporter à l'exercice ci-dessus pour simplifier la somme.

Indication de l'**exercice 35** : attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Indication de l'**exercice 38** : il y a quatre cas à envisager, suivant le signe de x et celui de $\ln|x|$

Indication de l'**exercice 41** :
Equation 3 : $-\cos\alpha = \cos(\alpha + \dots)$
Equation 6 : $-\tan\alpha = \tan(\dots \alpha)$
Equations 7 & 8 : $\sin\alpha = \cos(\cdots - \alpha)$

Indication de l'**exercice 48** : Pour (4) : élever au carré ! et revoir cours et exercices sur les trinômes paragraphe suivant...

Indication de l'**exercice 53** : Pour les équations $b)c)d)e)h)k)$ chercher d'abord des racines évidentes en utilisant la somme et le produit...

Indication de l'**exercice 54** : Pas besoin de discriminant pour les équations $(2), (3), (4)$

Indication de l'**exercice 55** : Bien vérifier que les éventuelles solutions trouvées sont de vraies solutions, et en particulier dans le domaine de définition de l'équation.
Pour (2) : élever au carré une première fois, puis une deuxième après avoir isolé la racine

Indication de l'**exercice 56** : Ne pas hésiter à tracer l'allure du graphe des deux premières fonctions ...

Indication de l'**exercice 57** :
- pour c) etc. : réduire au même dénominateur ;
- pour g) : on a en fait à traiter un système de deux inéquations

Indication de l'**exercice 58** :
- Pour (2) : distinguer deux cas suivant le signe de $x+1$ puis élever au carré si nécessaire.
- Pour (3) : même démarche.

Indication de l'**exercice 65** : trouver deux nombres dont la somme vaut S et le produit P, c'est résoudre l'équation du second degré $x^2 - Sx + P = 0$ (le démontrer)

Indication de l'**exercice 66** : par substitution.

Indication de l'**exercice 77** :
- pour a, comparer x et $\sqrt{x}$ au voisinage de $+\infty$
- pour b, c factoriser numérateur et dénominateur
- pour d, e utiliser le résultat encadré
- pour f penser à la limite d'une composée...
- pour g minorer...

Indication de l'**exercice 78** : Factoriser par
- x et x
- x^2 et x^2
- e^x et e^x

Indication de l'**exercice 79** : Factoriser par
- x^3 et x^4 pour f_1
- $x\ln x$ pour f_2
- e^x et x^{2013} pour f_3
- écrire $\ln(1+x) = \ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x})$
- factoriser par e^x pour f_5
- déterminer la limite de « ce qui est dans l'exponentielle » puis conclure en utilisant la limite d'une composée
- quantité conjuguée...
- factoriser e^{2x} dans le logarithme

Indication de l'**exercice 82** : Ne pas chercher midi à quatorze heures...

Indication de l'**exercice 84** : b)c)l)m)o)s)δ) : déterminer une constante λ telle que la fonction à intégrer soit de la forme $\lambda u' u^{\cdots}$
d) : développer
g) : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
k)déterminer une constante λ telle que la fonction à intégrer soit de la forme $\lambda\dfrac{u'}{u}$
u)v) : de la forme $u'\mathrm{e}^u$

Réponse de l'**exercice 1** : $A == -2a + 3b + 5c; B = 6; C = a - 9$

Réponse de l'**exercice 2** :
$A = \dfrac{32}{15}$

Réponse de l'**exercice 3** :
$A = a + c \qquad B = \dfrac{29}{12}$
$C = \dfrac{7}{5} \qquad D = \dfrac{2}{81}$
$E = \dfrac{201}{128} \qquad F = -\dfrac{17}{2}$

Réponse de l'**exercice 4** : ? ? ?

Réponse de l'**exercice 5** : ? ? ?

Réponse de l'**exercice 6** : ? ? ?

Réponse de l'**exercice 8** :
$A = 10 \qquad C = -5 + 4\sqrt{3} \qquad D = 0$
$E = 30\sqrt{2} \qquad F = 3(\sqrt{3} - 1)$
$G = 4\sqrt{2}|1 + x|$, toujours défini
$H = |\sqrt{x} - 1|$ si $x \geqslant 0$, pas défini pour $x < 0$
$J = 2\sqrt{3}$ et $K = \sqrt{42}$

Réponse de l'**exercice 9** :
$12 \times 11 \times 10 \times 9 \,; 22 \,; \dfrac{1}{10 \times 8!} \,; A = (n + 2)(n + 3) \qquad B = \dfrac{1}{(n + 1)!} \qquad C_n = \dfrac{1}{n + 1}\dfrac{a}{b^2}$

Réponse de l'**exercice 10** : $A = 343x^3y^3$; $B = 32a^{10}b^5$; $C = a^6$; $D = -\dfrac{1}{2}x^3y^3$; $E = \dfrac{3}{35}a^4x^2y^3$; $F = -\dfrac{2}{5}a^2b^2x^5$; $G = 10a^2x^5y^7$

Réponse de l'**exercice 11** :
$A = \dfrac{1}{2} \quad B = \dfrac{2^{n-1}}{3^n} \quad E = \dfrac{3}{2^3} \quad F = \dfrac{7}{2^8} \quad G = -7^{15} \times 11^8$
$K = a^{2n^2} \quad L = a^{n^2-n} \quad M = a^{6n} \quad P = a^{n^2}$

Réponse de l'**exercice 12** :
$A = (\mathrm{e}^x)^k \quad B = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} \quad C = \mathrm{e}^2 \times (\mathrm{e}^x)^3 \quad D = (1 - \mathrm{e})\mathrm{e}^x$
$E = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$; $F = \dfrac{(\mathrm{e}^x)^2 + 3\mathrm{e}^x + 2}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x + 2)}{\mathrm{e}^x}$

Réponse de l'**exercice 13** : $P(x) = 5x^3 + 7x - 1$
$Q(x) = -3x^2 + \dfrac{17}{12}x + 5$
$R(x) = -\dfrac{1}{3}x^2 - xy + y^2$
$S(a) = \dfrac{56}{15}a^2 - \dfrac{16}{3}a - \dfrac{1}{4}$
$T(x) = \dfrac{17}{6}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{7}{5}x - \dfrac{3}{2}$

Réponse de l'**exercice 14** : $A + B + C = 9x^2 - 10x + 12 \qquad A - B + C = 5x^2 + 4$
$A + B - C = x^2 - 8x + 6 \qquad -A + B + C = 3x^2 - 2x + 2$

Réponse de l'**exercice 15** : $A + B + C + = 15a^2 - 14ab + 9b^2 \qquad A - B + C = 3a^2 + 2ab - 9b^2$
$A + B - C = 7a^2 - 8ab + 23b^2 \qquad -A + B + C = 5a^2 - 8ab - 5b^2$

Réponse de l'**exercice 16** : $A = 4x^8 - 10x^6 + 4x^4 + 7x^3 - 14x$; $B - 20x^5 + 15x^4 + 8x^3 - 6x^2$
$C = 21x^6 - 6x^5 - 23x^4 + 10x^3 - 20x^2$; $D = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 18x - 20$
$E = -25x^5 + 50x^4 + 9x^3 - 50x^2 + 16x$; $F = 35/8x^6 - 19/2x^4 + 19/8x^3 + 4x^2 - 2x + 1/4$
$G = 3x^4 - 4x^2 + 1$; $H = 16x^6 + 16x^5 - 52x^4 + 12x^3 + 69x^2 - 70x + 25$

Réponse de l'**exercice 18** : $A = (x - 1)^2 \qquad B = (x + \dfrac{1}{2})^2 \qquad C = (2x - 1)^2 \qquad D = (a + 2)^2$
$E = 4x(x + y)^2 \qquad F = 3xy(x + y) \qquad G = 3xy(-x + y)$
$H = (x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2) \qquad K = (2a - 5)(4a^2 + 10a + 25)$

Réponse de l'**exercice 19** : $A = 9/4x^6 - 6/5x^3y^2 + 4/25y^4 \qquad B = 16/9x^10 + 16/15x^5y^3 + 4/25y^6$
$C = 4/25x^4 - 9/16y^2 \qquad D = 4/9a^4x^6 - 1/4b^8$

$E = 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 25 \qquad F = 4/9x^2 - 16/25y^2 - 8/5y - 1$

$G = 9x^2 + 24xy - 12xz + 16y^2 - 16yz + 4z^2 \qquad H = (\dfrac{5}{2}x - \dfrac{3}{4}y + z)^2 = 25/4x^2 - 15/4xy + 5xz + 9/16y^2 - 3/2yz + z^2$

Réponse de l'**exercice 20** :
$A = x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2 \qquad B = x^2 - 6ax + 9a^2 = (x - 3a)^2$
$C = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 \qquad D = 9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$
$E = x^2 + 2xy^2 + y^4 = (x + y^2)^2 \qquad F = 4a^2x^2 - 4ax + 1 = (2ax - 1)^2$

Réponse de l'**exercice 21** : $A = 5/2xy^2(x - 1)^2 \qquad B = 2ab(3x - 1)^2$

$C = 1/5a^3(2x - 5y)(2x + 5y) \qquad D = 1/12a^2b(3x - 10y)(3x + 10y)$

$E = y^2(5ax^2 - 2b)(5ax^2 + 2b) \qquad F = -(5x - 8)(x - 2)$

$G = (2x + 3)(2x - 1) \qquad H = x(3x + 2)(x + 6)(3x - 2)$

$I = (5x - 2)(3x - 5) \qquad J = (a + b + 2)(a + b - 2)(a - b)^2$

$K = (ax - 1)(-a + x) \qquad L = (ax + by)(ay + bx)$

$M = 4(b - 1)(b + 1)(a - 3)(a + 3) \qquad N = (2a + b - 3c)(2a + b + 3c)(2a - b + 3c)(2a - b - 3c)$

Réponse de l'**exercice 22** :
$A = \dfrac{7}{2}\dfrac{a^2x}{b^2} \qquad B = -\dfrac{2}{3}\dfrac{b}{x^2} \qquad C = -\dfrac{5}{2}\dfrac{y}{a^2}$
$D = \dfrac{x}{x - 1} \qquad E = \dfrac{x}{x - 1}$
$F = \dfrac{2x}{3a}$
$G = \dfrac{1}{ax - by} \qquad H = \dfrac{1}{3}(x + 3) \quad I = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

Réponse de l'**exercice 23** : $A = \dfrac{1}{7}x \qquad B = -\dfrac{2}{5}x - \dfrac{2}{15} \qquad C = \dfrac{2}{a} \qquad D = \dfrac{1}{2a + 1}$

$E = \dfrac{x + 5}{x + 1} \qquad F = \dfrac{x}{x + 1} \qquad G = \dfrac{1}{x + 2} \qquad H = -\dfrac{x + 4}{x(x + 2)}$

$I = \dfrac{2x}{x + 1} \qquad J = \dfrac{2}{x + 2}$

Réponse de l'**exercice 24** : $A = \dfrac{x^2}{3(x-1)}$ $B = \dfrac{1}{5x}$ $C = \dfrac{3}{5}a\dfrac{a-b}{a+b}$
$D = \dfrac{4}{5}\dfrac{a+b}{a^3}$ $E = 1$ $F = \dfrac{2x}{x-1}$
$G = \dfrac{1}{a+b}$ $H = \dfrac{a+b}{a-b}$

Réponse de l'**exercice 25** :
Toujours vrai ! On obtient en effet $(x-5)^2 \geqslant 0$

Réponse de l'**exercice 26** :
$A = (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$ $B = (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$
$C = (4a-1)^2$ $D = (a^2-2b^2)^2$
$E = (a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$ $F = (a+b)(a-b)(2a^2+1+2b^2)$
$G = (a-1)(a^{2n-1}+a^{2n-2}+\cdots+1)$ $H = (a+1)(a^{2n}-a^{2n-1}+a^{2n-2}\cdots+1)$ $M = a^{2n}-$
$J = (a-1)(a+2)(a+1)$ $K = (a-2b)(a+2b)$
$L = (2a-b)^2$ $P = (a-b)^2$
$2^{2n} = (a-2)(a^{2n-1}+2a^{2n-2}+2^2a^{2n-3}+\cdots+2^{2n-1})$

Réponse de l'**exercice 27** :
$A_n = \dfrac{3^{2n+1}-1}{2}$ $B_n = \dfrac{(-4)^{n+1}-1}{5}$
$C_n = \dfrac{1+(-1)^n a^{2n+2}}{1+a^2}$ $D_n = \dfrac{5}{126}((-5)^{3n+3}-1)$

Réponse de l'**exercice 28** :
$A_n = \dfrac{9}{2}(3^{n+1}-1)$ $C_n = \dfrac{3^{n+2}(3^{n+3}-1)}{2}$
$B_n = a^2\dfrac{a^{2n}-1}{a^2-1}$ si $a \neq 1$, n si $a = 1$

Réponse de l'**exercice 29** :

1. $4\ln 2$ $9\ln 2$ $-3\ln 2$ $\dfrac{1}{2}\ln 2$ $3\ln 2$
2. $2\ln 2+2\ln 3$ $-\ln 3-2\ln 2$ $2\ln 3-2\ln 2$ $\ln 3+11\ln 2$
3. $3\ln 5+2\ln 2$ $-2\ln 5+4\ln 2$ $2\ln 5-2\ln 2$ $-2\ln 2-2\ln 5$

Réponse de l'**exercice 31** : on trouve $y = 17+12\sqrt{2}$

Réponse de l'**exercice 32** : $A = B = 0$

Réponse de l'**exercice 33** :
8 $\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{1}{3}$ $\dfrac{1}{9}$ $-\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{1}{5}$

Réponse de l'**exercice 35** : dans les deux cas, si x est solution de l'équation considérée, alors x vérifie $x^2+13x-26=0$. Ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-13-\sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-13+\sqrt{273}}{2}$. Or $-x_1-5>0$ et $-x_2-5<0$, donc le premier membre de ces deux équations n'est pas défini en x_2 et x_1 est la seule solution possible pour les deux équations. Pour le second membre, on a : $\dfrac{x_1-61}{x_1+7} > 0$ mais $x_1-61<0$ donc la première équation n'admet aucune solution et la seconde en admet une seule, à savoir x_1.

Réponse de l'**exercice 36** :
$a = \dfrac{3}{2}$ $b = -2$ $c = \dfrac{1}{\ln 2}$ $d = -17$ $f = 1$ $g = -1$ $h = e$

Réponse de l'**exercice 37** :
la fonction est impaire ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

Réponse de l'**exercice 38** :
on trouve : $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x>1 \\ 1 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ -1 & \text{si} \quad -1<x<0 \\ -x^2 & \text{si} \quad x<-1 \end{cases}$

Réponse de l'**exercice 39** :
(1) $x \geqslant \dfrac{\ln 12+5}{3}$ $x \in [0,1]$ (2)
(3) $x \geqslant \dfrac{2}{e}$ $x \geqslant -\dfrac{1}{12}$ (4)

Réponse de l'**exercice 40** : la fonction tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$; elle est π-périodique et impaire, strictement croissante sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$, de limite $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes de cet intervalle.

Réponse de l'**exercice 41** :
$\mathcal{S}_1 = \{k\pi; k\in\mathbb{Z}\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_2 = \left\{\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{5}; k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_3 = \left\{\dfrac{2\pi}{3}+k\dfrac{4\pi}{3}; k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{2\pi}{5}+k\dfrac{4\pi}{5}; k\in\mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_4 = \emptyset$
$\mathcal{S}_5 = \left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{10}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_6 = \left\{\dfrac{\pi}{16}+k\dfrac{\pi}{4}; k\in\mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_7 = \left\{\dfrac{5\pi}{24}+\dfrac{5k\pi}{6}; k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{4}+5k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_8 = \left\{\dfrac{\pi}{22}+\dfrac{2k\pi}{11}; k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}; k\in\mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_9 = \{\pi+2k\pi; k\in\mathbb{Z}\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2k\pi}{3}; k\in\mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_{10} = \left\{\dfrac{\pi}{2}+2k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2k\pi}{5}; k\in\mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_{11} = \{k\pi; k\in\mathbb{Z}\}$

Réponse de l'**exercice 43** :
$(S_1) x = \dfrac{5\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$ $(S_2) x = \dfrac{2\pi}{3}$

Réponse de l'**exercice 44** :
$\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ $\sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ $\tan\dfrac{5\pi}{12} = \sqrt{3}+2$

Réponse de l'**exercice 45** :

$\dfrac{\sin 2a}{\sin a} - \dfrac{\cos 2a}{\cos a} = \dfrac{1}{\cos a}$ pour $a \notin \left\{k\dfrac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Réponse de l'**exercice 46** :
$\sin x + \cos x = 1 \iff \sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = \sin\dfrac{\pi}{4}$,
d'où les solutions $\mathcal{S} = \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Pour la seconde équation, on trouve $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Réponse de l'**exercice 48** :
(1) $-1 \leqslant x \leqslant 7$ (2) $x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 2$ (3) toujours vrai !
(4) $x \notin]-4; -\dfrac{2}{3}[$ (5) $-2 \leqslant x \leqslant 5$

Réponse de l'**exercice 49** :

$$x = \frac{4}{3}(1) \qquad x = 5(2) \qquad x = -\frac{29}{2}(3) \qquad x = \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{5}(4)$$

Réponse de l'**exercice 50** : ? ? ?

Réponse de l'**exercice 51** : ? ? ?

Réponse de l'**exercice 53** :
$a) \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}$ $b) 8, 2$
$c) \sqrt{2}, \sqrt{8}$ $d) a, 2$
$e) 1, \pi$ $f) 4 \pm \sqrt{2} 2$
$g) -\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{2}$ $i) x = \pm 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$
$h) 0, 6$ $j) \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{26}$
$k) -3a, -a$ $l) x = \pm\dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{5}{3}}$
$m) \dfrac{1}{6}, 1$
Attention ! Pas de calcul de discriminant pour h), i) et l) !

Réponse de l'**exercice 54** :
(1) $\dfrac{10}{7}, 5$ (2) $0, \dfrac{1}{3}$
(3) $x = \pm 7$ (4) $-1, -7$

Réponse de l'**exercice 55** :

$$(1) \quad 2 \qquad (2) \emptyset \qquad (3) \quad -\frac{7}{4}$$

Réponse de l'**exercice 56** :

$$(1) \quad x \in \left]\frac{1}{3}; 5\right[\qquad (2) \quad x \in \left]-3; \frac{5}{2}\right[\qquad (3) \quad x \in \left[-\frac{1}{2}; 5\right[$$

Réponse de l'**exercice 57** :
a) toujours vrai b) toujours vrai
c) $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[\cup]2, +\infty[$ d) $\left]0, \dfrac{7 - \sqrt{17}}{2}\right[\cup \left]2, + \dfrac{7 + \sqrt{17}}{2}\right[$
e) $]-\infty, 3[\cup]4, +\infty[$ f) $[1, 2] \cup [4, 7]$
g) $[2, 5] \cup [9, 12]$ h) $]1, +\infty[$

Réponse de l'**exercice 58** :

$$[0, 1[\quad (1) \qquad [-4, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}[\quad (2)$$

Pas de solution (3)

Réponse de l'**exercice 59** : On trouve 2 racines réelles : $\pm\sqrt{5}$ et 2 complexes $\pm i$.

Réponse de l'**exercice 60** : Pour la première : $\ln x = -6$ ou 7 d'où $x = \mathrm{e}^{-6}$ ou e^{7}. Pour la seconde : $\ln^2 x = 7$ donc $x = \mathrm{e}^{\sqrt{7}}$ ou $x = \mathrm{e}^{-\sqrt{7}}$

Réponse de l'**exercice 61** :

$$(S_1) \begin{cases} x &= \dfrac{1}{2} \\ y &= -\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} x &= 3 \\ y &= 5 \end{cases}$$

Réponse de l'**exercice 62** :

$$(S_1) \begin{cases} x &= \mathrm{e}^{-2} \\ y &= 1 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} x &= -2 \\ y &= 0 \end{cases}$$

Réponse de l'**exercice 63** : On trouve $x = \ln 2, y = \ln 5$

Réponse de l'**exercice 64** : On trouve $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ et $\cos y = -1$, d'où $x = \dfrac{2\pi}{3}$ et $y = \pi$

Réponse de l'**exercice 65** : $(S_1) 25, 40$ et $(S_2) 12, 18$

Réponse de l'**exercice 66** : $(S_1) x = 18, y = 17$
$(S_2) \begin{cases} \mathrm{e}^x = 5 \\ \mathrm{e}^y = 6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \mathrm{e}^x = -\dfrac{6}{5} \\ \mathrm{e}^y = -25 \end{cases}$, donc finalement une seule solution $x = \ln 5$ et $y = \ln 6$

Réponse de l'**exercice 67** : ? ? ? ?

Réponse de l'**exercice 68** : ? ? ? ?

Réponse de l'**exercice 69** : ? ? ? ?

Réponse de l'**exercice 71** :
$a = 1 \quad b = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad c = 1 \quad d = -1 \quad f = 1 \quad g = -i = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$
$h = -i \quad j = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}} \quad k = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} \quad l = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}} \quad m = \mathrm{e}^{i\frac{-\pi}{4}}$

Réponse de l'**exercice 72** :
$\omega^{2013} = \mathrm{e}^{i\frac{6\pi}{5}}$

Réponse de l'**exercice 74** :
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^2b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ d'où $(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})^4 = \mathrm{e}^{4ix} + 4\mathrm{e}^{2ix} + 6 + 4\mathrm{e}^{-2ix} + \mathrm{e}^{-4ix}$

Réponse de l'**exercice 75** :
$(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{ix})^2(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix})^4 = \mathrm{e}^{6ix} - 2\mathrm{e}^{4ix} - \mathrm{e}^{2ix} + 4 - \mathrm{e}^{-2ix} - 2\mathrm{e}^{-4ix} + \mathrm{e}^{-6ix}$

Réponse de l'**exercice 77** : $0, \dfrac{1}{4}, 0, 0, 0, 0, +\infty$

Réponse de l'**exercice 78** : -1 ; 0 ; -1 ; $\dfrac{1}{2}$; 2

Réponse de l'**exercice 79** : $0, 1, +\infty, 1, \dfrac{1}{2}, +\infty, \dfrac{1}{2}, 0$

Réponse de l'**exercice 80** :

$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ $x \mapsto -\dfrac{2}{x^3}$ $x \mapsto -3\dfrac{1}{x^4}$ $x \mapsto -4\dfrac{1}{x^5}$ $\dots$

$x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$ $x \mapsto -\dfrac{2}{(x-1)^3}$ $x \mapsto \dfrac{3}{(x-1)^4}$ $x \mapsto -\dfrac{4}{(x-1)^5}$ $\dots$

$x \mapsto -2\dfrac{1}{(2x+1)^2}$ $x \mapsto -\dfrac{4}{(2x+1)^3}$ $x \mapsto -\dfrac{6}{(2x+1)^4}$ $x \mapsto -\dfrac{8}{(2x+1)^5}$ $\dots$

Réponse de l'**exercice 81** :

$f_1' : x \mapsto 3(x-1)^2$ $f_2' : x \mapsto 6x(x^2-1)^2$ $f_3' : x \mapsto 6(x-1)$

$f_4' : x \mapsto 2x-3$ $f_5' : x \mapsto \dfrac{2}{(x+3)^2}$ $f_6' : x \mapsto -\dfrac{5}{(2+x)^2}$

$f_7' : x \mapsto \dfrac{4}{(1-x)^2}$ $f_8' : x \mapsto 6x + \dfrac{1}{x^2}$ $f_9' : x \mapsto -3x^2 + 18x - 26$

$g_1' : x \mapsto -3\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$ $g_2' : x \mapsto \dfrac{x^2-2x-1}{(x^2-x+2)^2}$ $g_3' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$

$g_4' : x \mapsto \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ $g_5' : x \mapsto \dfrac{2}{5}\dfrac{x}{(x^2+1)^{\frac{4}{5}}}$ $g_6' : x \mapsto \dfrac{1}{(-x+2)^2}$

$g_7' : x \mapsto -2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$ $g_8' : x \mapsto -2\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})$ $g_9' : x \mapsto 2\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$

$h_1' : x \mapsto -6\sin x(2\cos x - 1)$ $h_2' : x \mapsto \dfrac{-\sin^3 x}{(1+\cos^2 x)^2}$ $h_3' : x \mapsto 4\cos^2 x + \cos x - \sin x - 2$

$h_4' : x \mapsto \dfrac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2}$ $h_5' : x \mapsto \dfrac{5}{5x-1}$ $h_6' : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$

$h_7' : x \mapsto \dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$ $h_8' : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ $h_9' : x \mapsto \dfrac{2}{7-2x}$

$u_1' : x \mapsto \ln x$ $u_2' : x \mapsto 3\mathrm{e}^{3x}$ $u_3' : x \mapsto (2x-1)\mathrm{e}^{x^2-x+1}$

$u_4' : x \mapsto \cos x \mathrm{e}^{\sin x}$ $u_5' : x \mapsto -2\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$ $u_6' : x \mapsto (1+\ln x)\mathrm{e}^{x\ln x}$

$u_7' : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(1-\dfrac{1}{x})$ $u_8' : x \mapsto \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1}$ $u_9' : x \mapsto \dfrac{1+\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$

$v_1' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$ $v_2' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}(x+1)^{\frac{3}{2}}}$

$v_3' : x \mapsto \cos x \dfrac{1}{\sqrt{1+\sin x}(1-\sin x)^{3/2}}$ $v_4' : x \mapsto \dfrac{2}{\cos^2 2x}$

Réponse de l'**exercice 82** : $x \mapsto \ln|x|$

Réponse de l'**exercice 83** :

A une constante additive près, on trouve :

$x \mapsto \dfrac{1}{17}x^{17} - \dfrac{5}{2}x^{14} + \dfrac{7}{6}x^{12} - \dfrac{1}{3}x^9 + 4x^5 + 14x^4 + 17x^3 + 9x^2 + x$

$f_1 : x \mapsto \ln|x|$ $f_2 : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ $f_3 : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2}$ $f_4 : x \mapsto -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x^3}$

$g_1 : x \mapsto -\ln|1-x|$ $g_2 : x \mapsto -\dfrac{1}{x-1}$ $g_3 : x \mapsto \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x-1)^2}$ $g_4 : x \mapsto -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(x-1)^3}$

$h_1 : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln|2x+1|$ $h_2 : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2x+1}$ $h_3 : x \mapsto -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(2x+1)^2}$ $h_4 : x \mapsto -\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{(2x+1)^3}$

Réponse de l'**exercice 84** : A une constante additive près :

$a) x \mapsto \dfrac{4}{3}4x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - \dfrac{1}{x}$ $b) x \mapsto \dfrac{1}{20}(2x^2+1)^5$ $c) x \mapsto \dfrac{1}{4}(x-1)^4$

$e) x \mapsto \dfrac{1}{7}x^7 - \dfrac{3}{5}x^5 + x^3 - x$ $f) x \mapsto -\dfrac{1}{x} - 2\sqrt{x}$ $g) x \mapsto \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x$

$h) x \mapsto -\dfrac{1}{2}\cos 2x$ $i) x \mapsto \dfrac{1}{3}\sin 3x$ $j) x \mapsto x - \tan x$

$k) x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln|x^2+2x|$ $l) x \mapsto \dfrac{1}{6}(x^2-1)^6$ $m) x \mapsto -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x^2+2)}$

$n) x \mapsto \ln|x-3|$ $o) x \mapsto -\dfrac{1}{x^2+x+3}$ $p) x \mapsto \dfrac{1}{3}\ln|x^3-1|$

$q) x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ $r) x \mapsto \dfrac{1}{5}\ln(\mathrm{e}^x+1)$ $s) x \mapsto \dfrac{3}{8}(1+\mathrm{e}^{2x})^{\frac{4}{3}}$

$t) x \mapsto -\ln|\cos x|$ $u) x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ $v) x \mapsto 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

$w) x \mapsto \dfrac{15}{2}x^{\frac{2}{3}}$ $y) x \mapsto -\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ $z) x \mapsto -2\sqrt{\mathrm{e}^x}$

$\alpha) x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$ $\beta) x \mapsto -\mathrm{e}^{\cos x}$ $\gamma) x \mapsto -\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$

$\delta) x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1+2\mathrm{e}^x}}$ $\varepsilon) x \mapsto \ln|\cos x + \sin x|$

Réponse de l'**exercice 85** :

$I_1 = \ln 2$ $I_2 = \dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2})$ $I_3 = \dfrac{3}{2}\ln 10$ $I_4 = 2\ln\dfrac{63}{55}$ $I_5 = 0$